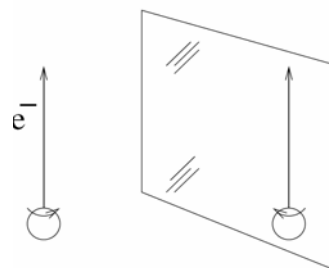


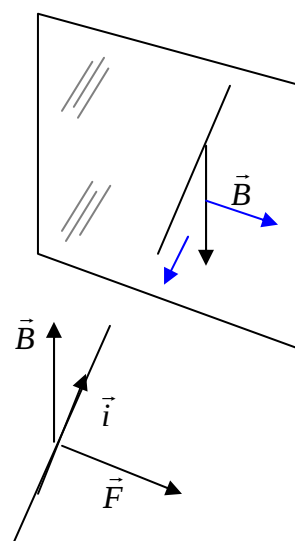
Questão nº 1

a) A figura 1 mostra, do lado esquerdo o resultado de uma verificação experimental no laboratório. Na emissão de electrões pelo núcleo (declínio β) a direcção preferencial de saída é na direcção do observador quando este vê o núcleo girar no sentido directo. Do lado direito temos a experiência vista ao espelho. O resultado desta experiência é o mesmo que o do laboratório? Justifique



Ao espelho vê-se o núcleo girar em sentido anti-directo ou horário; os electrões são emitidos no sentido indicado, o que relativamente ao sentido de rotação do núcleo (ou ao seu spin) é ao contrário do que se observa no laboratório.

b) Temos agora outra experiência que no laboratório está representada no lado de baixo. Um fio condutor percorrido por uma corrente $\vec{i}$ sob a acção de um campo magnético $\vec{B}$, tal como indicado, fica sob a acção de uma força $\vec{F}$ proporcional a $\vec{i} \times \vec{B}$, deslocando-se para a direita. Na experiência vista ao espelho, em cima, o campo magnético tem o sentido contrário (isto porque é produzido por correntes em circuito fechado; no espelho os sentidos de rotação invertem-se e portanto também o campo magnético). Tendo em atenção o sentido da corrente (qual é?) e aplicando a expressão dada para a força à experiência vista no espelho, obtemos para o deslocamento do condutor uma imagem ao espelho do que se observa no laboratório?



Ao espelho a corrente está dirigida para cá (como indicado na figura a azul). Aplicando o produto externo vê-se que a força está dirigida para a direita, sendo também o deslocamento nesse sentido, o que corresponde à imagem ao espelho do deslocamento observado no laboratório.

Questão nº 2

Suponha que não conhecia a expressão da energia associada ao movimento, ou seja a energia cinética. Sabe que é proporcional à massa e que depende da velocidade, v . Tendo em atenção que esta tanto pode ser positiva como negativa (para indicar o sentido relativamente a uma dado referencial), consideraria mais provável a energia cinética ser proporcional a v ou a v^2 ? Porquê

A energia cinética é directamente aproveitável (transferível) sob a forma de trabalho. Essa capacidade de produzir trabalho é independente do sentido da velocidade. Assim faria (como faz) mais sentido a energia cinética ser proporcional a v^2 .

.....
.....
.....

Questão nº 1

Comente a seguinte publicidade a uma bebida:

“Toda a Energia.....Sem Açúcar! Só 8 calorias!”

Esta frase leva a várias interpretações incorrectas: a) que só há calorias associadas ao açúcar; b) que energia (saudável) nada tem a ver com calorias (o que engorda); c) “toda a energia” tem de ser analisada face ao significado de 8 calorias em relação ao que é suposto um adulto ingerir por dia (acima de 1500 calorias).

.....

Questão nº 2

Quais as formas de energia envolvidas no seguinte sistema – barco a motor movendo-se a velocidade constante num lago? Informação adicional, a energia produzida por unidade de tempo pelo motor depende da velocidade (na realidade para velocidades não muito elevadas é aproximadamente proporcional a $v^{1/3}$).

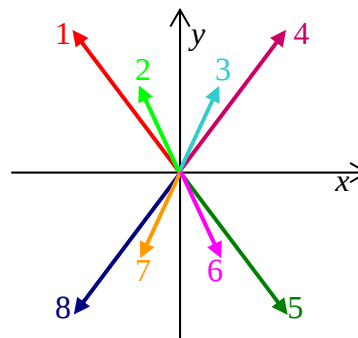
Temos: a) queima de combustível no motor, ou seja energia química (variação das energias potencial e cinética associada às moléculas do combustível e oxigénio); b) energia cinética da hélice (ou equivalente) do barco; c) energia cinética do barco; d) energia transferida sob a forma de calor para a água e ar, devido à resistência da água e ar aos movimentos da hélice (só água) e do barco (água e ar); energia transferida sob a forma de calor para os componentes móveis do motor que faz girar a hélice, devido ao atrito entre essas peças e óleo (ou massa) de lubrificação, calor depois transferido para o ar ou água).

.....
.....

Questão 1:

Duas forças horizontais dadas, em unidades SI por $\vec{F}_1 = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ e $\vec{F}_2 = -1\vec{i} - 2\vec{j}$ estão aplicadas num objecto.

- Sem fazer cálculos diga quais das forças representadas no diagrama podem corresponder a $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$.
- Quanto valem as componentes da força resultante segundo x e y .



a) Podem ser as forças 5 e 7, atendendo ao sinal das componentes ($\vec{F}_1$ do 4º quadrante e $\vec{F}_2$ do terceiro) e o seu tamanho relativo – sem fazer contas, atendendo só ao valor das componentes F_x é cerca do dobro de $\vec{F}_1$.

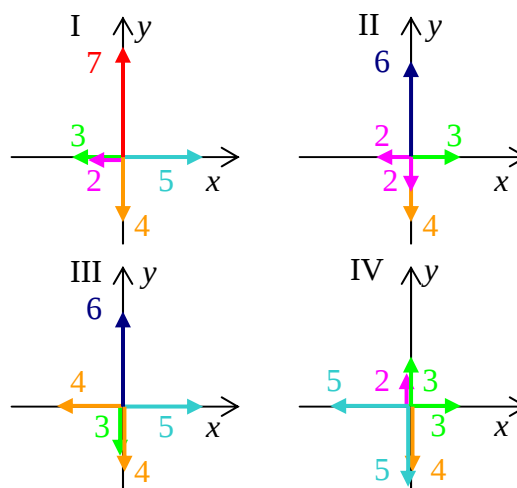
b) $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (3-1)\vec{i} + (-4-2)\vec{j} = 2\vec{i} - 6\vec{j}$
 $F_x = 2 \text{ N}$
 $F_y = -6 \text{ N}$

Questão 2:

Nos diagramas da figura estão representadas as forças horizontais, com indicação de intensidade em unidades SI, que em quatro situações diferentes actuam sobre um corpo de massa igual a 1 kg.

Sabendo que actuam apenas estas forças diga:

- em que situação a aceleração tem componente segundo x
- em que situação a aceleração tem componente segundo y
- quais são os vectores aceleração para cada uma das situações.



a) Em I a componente segundo x da resultante das forças aplicadas é igual a zero, pelo que a aceleração também será (pela 2ª lei de Newton); em II, III, e IV a aceleração tem componente segundo x porque a componente segundo x da resultante das forças aplicadas é diferente de zero.

b) Repetindo o raciocínio a aceleração tem componente segundo y em I, III, IV

c) Em unidades Si temos para I, II, III, IV, respectivamente:

$$\vec{a} = \vec{F}_R / m = (5-3-2)\vec{i} + (7-4)\vec{j} = 3\vec{j}$$

$$\vec{a} = \vec{F}_R / m = (3-2)\vec{i} + (6-4-2)\vec{j} = 1\vec{i}$$

$$\vec{a} = \vec{F}_R / m = (5-4)\vec{i} + (6-4-3)\vec{j} = 1\vec{i} - 1\vec{j}$$

$$\vec{a} = \vec{F}_R / m = (3-5)\vec{i} + (3+2-4-5)\vec{j} = -2\vec{i} - 4\vec{j}$$

Questão 1:

Para arrastar um bloco de 75 kg pelo chão, **a uma velocidade constante**, tem de se puxar com uma força horizontal de 250 N.

a) Qual é a força de atrito exercida pelo chão, sabendo que o atrito e a força aplicada são as únicas forças exercidas sobre o bloco.

b) Qual é a força horizontal que se tem de exercer para o bloco ter uma aceleração de 2 m/s²?

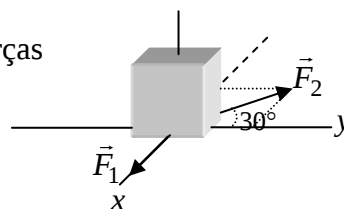
a) Se o bloco se desloca a velocidade constante, a resultante das forças aplicadas tem de ser igual a zero. Assim a força de atrito tem de ser igual e de sinal contrário à força aplicada; $f_c = 250$ N com sentido oposto à força aplicada $\vec{F}$

b) $\vec{F}_R = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F} + \vec{f}_c = m\vec{a} \Rightarrow F - f_c = ma \Rightarrow F - 250 = 75 \times 2$
 $F = 400$ N

Questão 2

Um objecto de 10 kg numa mesa sem atrito é sujeito a duas forças horizontais, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, dadas por $\vec{F}_1 = 20\hat{i}$ (N) e

$\vec{F}_2 = (-30\sin 30^\circ)\hat{i} + (30\cos 30^\circ)\hat{j}$ (N), como se pode ver pela figura.



a) Calcule a aceleração $\vec{a}$ do objecto.

b) Uma terceira força é aplicada de modo que fica em equilíbrio estático. Calcule $\vec{F}_3$.

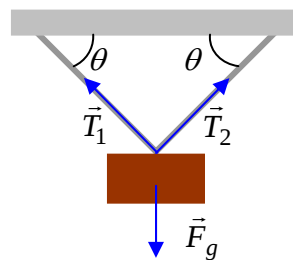
a)

$$\vec{F}_R = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m\vec{a} \Rightarrow (20 - 15)\vec{i} + 26\vec{j} = 10\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = (0,5\vec{i} + 2,6\vec{j}) \text{ m/s}^2$$

b) $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0 \Rightarrow \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \Rightarrow \vec{F}_3 = (-5\vec{i} - 26\vec{j})$ N

Questão 1

Um objecto de 2 kg está preso por dois fios com o mesmo comprimento. Cada um faz um ângulo θ com a horizontal, como mostra a figura. Calcule a tensão dos fios, para $\theta=10^\circ$ e $\theta=60^\circ$.



Resolução

As forças aplicadas no corpo são as representadas a azul sobre a figura. A resultante das forças tem de ser igual a zero porque o corpo está em equilíbrio. Podemos equacionar esta afirmação usando as componentes das forças na horizontal e na vertical:

$$\begin{aligned} -T_1 \cos \theta + T_2 \cos \theta &= 0 \Rightarrow T_1 = T_2 = T \\ +T_1 \sin \theta + T_2 \sin \theta - mg &= 0 \quad 2T \sin \theta = mg \end{aligned}$$

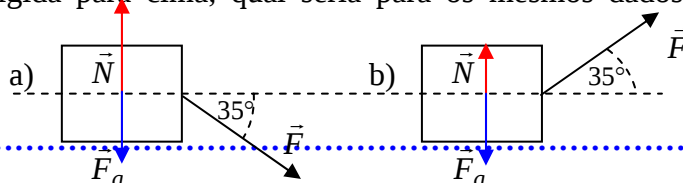
$$T = \frac{mg}{2 \sin \theta}$$

Para $\theta=10^\circ$ Resp: $T=56 \text{ N}$

Para $\theta=60^\circ$ Resp: $T=11 \text{ N}$

Questão 2

Uma caixa grande, cuja massa é 20 kg, está em repouso sobre um plano sem atrito. Um carregador puxa a caixa com uma força de 250 N, que tem uma direcção que faz um ângulo de 35° com a horizontal, tendo uma componente vertical dirigida para baixo. a) Qual é a aceleração da caixa ao movimentar-se no chão? b) Sendo a componente vertical da força dirigida para cima, qual seria para os mesmos dados numéricos a aceleração da caixa?



Resolução

a) As forças são as representadas. Temos usando as componentes horizontais e verticais das mesmas:

$$N - F_g - F_y = 0$$

$$F_x = ma \Rightarrow a = \frac{F_x}{m} = \frac{F \cos \theta}{m}$$

$$\text{Substituindo vem: } \Rightarrow a = \frac{250 \cos 35^\circ}{20} = 10 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

b) Temos agora:

$$N - F_g + F_y = 0 \quad \text{se} \quad N \geq 0 \Rightarrow F_y \leq F_g, \text{ o que é o caso}^*$$

$$F_x = ma \Rightarrow a = \frac{F_x}{m} = \frac{F \cos \theta}{m} \quad \text{o que leva ao mesmo valor: } a = 10 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

* No caso contrário, a caixa deixaria de estar em contacto com o chão e existiria uma componente vertical da aceleração dada por $(F_y - F_g)/m$ que teria de ser considerada também.

Questão 1

Uma partícula desloca-se no plano xy com aceleração constante. No instante zero, a partícula está na posição $x = 4\text{m}$, $y = 3\text{m}$ e tem velocidade $\vec{v}_0 = (2 \text{ m/s})\vec{i} + (-9 \text{ m/s})\vec{j}$.

A aceleração é dada por $\vec{a} = (4 \text{ m/s}^2)\vec{i} + (3 \text{ m/s}^2)\vec{j}$.

- Determine a velocidade no instante $t = 2\text{s}$.
- Qual a posição em $t = 4\text{s}$? Indique a intensidade e a direcção do vector posição.

Resolução

a) Com aceleração constante temos:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = (v_{x0} + a_x t)\vec{i} + (v_{y0} + a_y t)\vec{j} \quad (\text{m/s})$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (\text{m/s})$$

$$\vec{v}(t = 2\text{s}) = (2 + 8)\vec{i} + (-9 + 6)\vec{j}$$

$$\vec{v}(t = 2\text{s}) = (10\vec{i} - 3\vec{j})\text{m/s} \Rightarrow v = 10 \text{ m/s}$$

$$\text{b) } \vec{r} = \left(x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \right)\vec{i} + \left(y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \right)\vec{j} \quad (\text{m/s})$$

$$\vec{r}(t = 4\text{s}) = (4 + 8 + 32)\vec{i} + (3 - 36 + 24)\vec{j} = (44\vec{i} - 9\vec{j})\text{m}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 45\text{m} ; \text{ ângulo } \alpha \text{ com o eixo dos } x: \cos \alpha = 44/45 \Rightarrow \alpha = 12^\circ$$

.....

Questão 2

Um projectil é disparado com uma velocidade inicial de 53 m/s da altura do sólo. Determine o ângulo que o vector velocidade inicial faz com o plano horizontal, sabendo que a altura máxima do projectil é igual ao seu alcance horizontal. Para uma maior velocidade inicial o ângulo seria maior ou mais pequeno?

Resolução

$$h_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}$$

$$L = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

$$\text{tg } \theta = 4 \Leftrightarrow \theta = 76^\circ, \text{ independente da velocidade inicial.}$$

.....

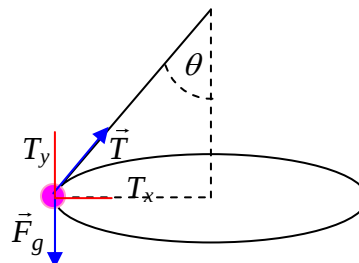
Questão 1

Um rapaz faz girar uma bola de 0,5 kg, presa a um fio, fazendo um círculo horizontal de raio 0,8 m. Quantas rotações por minuto deve fazer a bola para que a sua aceleração centrípeta seja g ? Quanto vale a tensão no fio?

Resolução

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{\sqrt{a_c r}}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a_c}{r}}$$

$$f = 0,55 \text{ rot/s} = 33 \text{ rot/min}$$



Na figura estão representadas a azul as forças aplicadas e a vermelho as componentes da tensão segundo a horizontal e a vertical. Aplicando a 2ª lei de Newton para cada uma dessas direcções, temos:

$$T_y - F_g = 0 \Rightarrow T \cos \theta - mg = 0$$

$$T_x = ma_c \Rightarrow T \sin \theta = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow \tan \theta = \frac{v^2}{Rg}$$

Vemos que o caso de fio horizontal, $\theta = \pi/2$, é um limite para velocidade muito elevada.

Por outro lado, com os dados do problema temos $\tan \theta = \frac{g}{g} = 1$, pelo que θ é igual a

45°. E temos, elevando as duas equações nas componentes de $\vec{T}$ ao quadrado e somando, $T = m\sqrt{g^2 + a_c^2} = mg\sqrt{2} = 6,9 \text{ N}$

.....

Questão 2

Um homem puxa uma caixa de 24 kg ao longo de um plano sem atrito. A caixa inicialmente está em repouso. Ele inicialmente puxa a caixa suavemente e gradualmente vai aumentando a força exercida, que varia com o tempo através da equação: $F = 8t$ (N). Passados 3 s, ele pára de puxar a caixa. A força é sempre exercida na mesma direcção.

- Qual é a velocidade da caixa passados os 3s?
- Qual foi a distância que a caixa andou, enquanto o homem a puxava, durante os 3 s?

Resolução

a) Aplicando a segunda lei de Newton à direcção horizontal, temos:

$$a = \frac{8t}{m} \Rightarrow v = v_0 + \int_0^t a \, dt \Rightarrow v = \frac{8t^2}{2m} \Rightarrow v(t=3) = 1,5 \text{ m/s}$$

$$b) v = \frac{8t^2}{2m} \Rightarrow x = x_0 + \int_0^t v \, dt \Rightarrow x = \frac{8t^3}{6m} \Rightarrow x(t=3) = 1,5 \text{ m}$$

.....

Questão 1

Uma mulher, com um pacote de 10 kg, pendurado por um fio que pode suportar uma tensão de 150 N, entra num elevador. Quando o elevador começa a subir, o fio quebra-se. Qual foi, no mínimo, a aceleração do elevador? Qual o valor da força fictícia, F' , que a mulher teria de suportar para, no seu referencial, explicar o sucedido.

Resolução (resumida)

As forças aplicadas no pacote são o seu peso (ou força gravítica) e a tensão no fio. Considerando positivo o sentido para cima, que é também o da aceleração, temos:

$$T - mg = ma \Rightarrow a = \frac{T - mg}{m} \Rightarrow a = 5,2 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

No referencial da mulher o pacote está parado. A mulher sabe que o seu peso é de 98 N e que o fio se parte. Logo a tensão além de compensar o peso tem de compensar uma força adicional dirigida para baixo tal que:

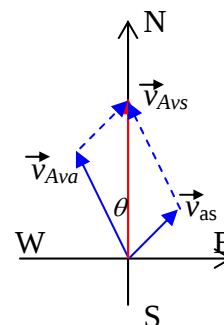
$$T - mg - F' = 0 \quad \text{Comparando com a expressão acima} \quad F' = ma$$

$$F' = 52 \text{ N}$$

Questão 2

Um avião voa com uma velocidade de 250 km/h, relativamente ao ar. Ao mesmo tempo, o vento sopra a 80 km/h na direcção nordeste, isto é, 45° a leste da direcção norte.

- Qual deve ser a direcção do avião para que se desloque para o norte?
- Qual é a velocidade do avião em relação ao solo?



Resolução

- Seja $\vec{v}_{Avs}$ a velocidade do avião em relação ao solo que se pretende que seja orientada para Norte, seja $\vec{v}_{as}$ a velocidade do ar em relação ao solo, ou seja a velocidade do vento, seja $\vec{v}_{Ava}$ a velocidade do avião em relação ao ar que em módulo é igual a 250 km/h, temos então:

$$\vec{v}_{Avs} = \vec{v}_{Ava} + \vec{v}_{as}$$

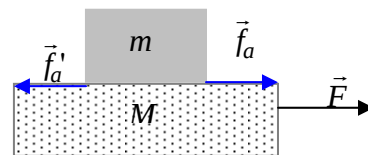
A velocidade do avião em relação ao solo que é igual à soma dos outros dois vectores não tem componente na linha EW; assim chamando x à direcção EW, temos:

$$|v_{Ava \ x}| = |v_{as \ x}| \Leftrightarrow 250 \sin \theta = 80 \sin 45^\circ \Rightarrow \theta = 13^\circ, \text{ nor-noroeste}$$

- $v_{Avs} = 250 \cos 13^\circ + 80 \cos 45^\circ = 300 \text{ km/h} \Leftarrow$ soma das componentes segundo y (NS) dos outros dois vectores

Questão 1

Um bloco de massa $m=1,0$ kg está em repouso sobre uma caixa de massa $M = 2,0$ kg, como mostra a figura. Uma força $\vec{F}$ é aplicada sobre a caixa e esta desliza sobre uma superfície sem atrito. Se o coeficiente de atrito estático entre a caixa e o bloco for $\mu_s = 0.5$ determine o valor máximo de $\vec{F}$ para que o bloco não deslize.



Resolução

Ao puxar a caixa para a direita relativamente ao bloco (em cima) aparece uma força de atrito que actua sobre a caixa $\vec{f}'_a$, opondo-se ao movimento; por acção-reacção aparece sobre o bloco uma força igual em intensidade mas de sinal contrário $\vec{f}_a$. Então:

$$\text{Bloco} \rightarrow f_a = ma \quad \text{Caixa} \rightarrow F - f'_a = Ma \Rightarrow F = (M+m)a \Rightarrow F/f_a = (M+m)/m$$

$$f_a \leq \mu_s N \quad f_a \leq \mu_s mg \quad F \leq (M+m) \mu_s g \quad \text{Valor máximo} \rightarrow 14,7 = 15 \text{ N}$$

A reacção N é a que actua sobre o bloco, sendo igual em intensidade ao peso do mesmo (visto não haver movimento na vertical)

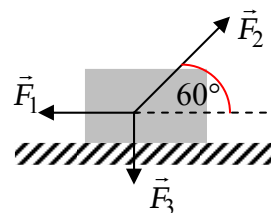
.....

Questão 2

Um bloco, sobre uma superfície horizontal sem atrito, desloca-se para a esquerda, sob a acção das três forças representadas. Para um percurso de 3,0 m, determine:

- o trabalho realizado pelo conjunto das forças;
- a variação da energia cinética do corpo. Esta é negativa ou positiva? Comente.

Dados: $F_1 = 5,0$ N; $F_2 = 9,0$ N; $F_3 = 3,0$ N



Resolução

a) Como as forças são constantes o trabalho vem igual ao produto interno da força pelo deslocamento, sendo positivo quando a força tem o sentido do deslocamento e negativo em caso contrário. Assim

$$W = F_1 d - F_2 \cos 60^\circ d = 5 \times 3 - 4,5 \times 3 = (5 - 4,5) \times 3 = 1,5 \text{ J}$$

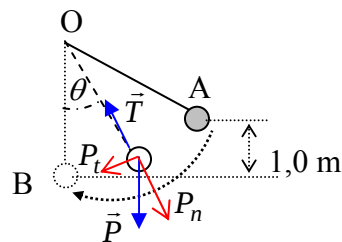
b) Pelo teorema de trabalho-energia cinética, o trabalho da força resultante é igual à variação da energia cinética.

$\Delta E_c = 1,5$ J, porque o peso e a normal não realizam trabalho; é positiva, já que o trabalho resultante é positivo, o que implica transferência de energia para o sistema.

.....

Questão 1

Uma bola de chumbo de 20 kg está suspensa numa corda de 5,0 m, de massa desprezável, fixa no ponto O. A bola é largada sem velocidade inicial da posição indicada A, em que a diferença de nível vertical em relação à situação B, é de 1,0 m. A corda parte-se se a tensão exceder 300 N.



- Onde é que a tensão tem o máximo valor?
- Qual é o valor máximo da velocidade que a bola pode alcançar, para a corda não partir?
- A corda parte? Justifique a resposta.

Resolução

a) Em qualquer ponto da trajectória, a um ângulo θ arbitrário, as forças que actuam na bola (peso e tensão) estão representadas a azul e as componentes normal e tangencial do peso a vermelho. Podemos escrever a seguinte equação (por aplicação da 2ª lei de Newton) para a normal:

$$T - P \cos \theta = m a_n = m \frac{v^2}{\ell} \Rightarrow T = m \frac{v^2}{\ell} + P \cos \theta \quad \text{em que } \ell \text{ é o comprimento da}$$

corda. Por considerações de conservação de energia, a velocidade será máxima, quando a bola está à altura mínima possível, isto é quando a corda está na vertical; para essa posição o termo $P \cos \theta$ tem o valor máximo igual a P , pelo que T irá ter o valor máximo possível.

b) Usando a expressão anterior para $\theta = 0$ e $T = 300$ N, vem

$$m \frac{v^2}{\ell} = T - P \cos \theta \Rightarrow v^2 = \frac{\ell T}{m} - \ell g = \frac{1500}{20} - 50 = 25 \Rightarrow v = 5 \text{ m/s}$$

c) Usando a conservação de energia mecânica para as condições dadas, vem:

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g h \Rightarrow v^2 = 2 g h \Rightarrow v^2 = 20 \Rightarrow v = 4,5 \text{ m/s}$$

pelo que a corda não parte.

Questão 2

Um lançador de bolas de uma máquina de jogos, como se mostra na figura, tem uma mola com uma constante de força 1.20 N/cm. A superfície em que a bola se move tem uma inclinação de 10° em relação à horizontal.



Se a mola está inicialmente comprimida de 5.00 cm, determine a velocidade de lançamento de uma bola de 100 g quando o lançador é solto. Despreze o atrito e a massa da mola.

Resolução

Considerando a energia potencial gravítica igual a zero no ponto de equilíbrio da mola, em que a energia potencial elástica é nula também, temos para o instante inicial $U_g = -mgx\sin 10^\circ$, sendo x a compressão inicial da mola, e a energia potencial elástica (acumulada na mola) é $U_{el} = 1/2kx^2$. A energia cinética na posição inicial é nula. No ponto de lançamento, ponto de equilíbrio da mola, só há energia cinética. Consequentemente, as expressões para a energia mecânica, inicial e final, são:

$$E_i = -mg\Delta x_{\max} \sin 10^\circ + \frac{1}{2}k(\Delta x_{\max})^2$$

$$E_f = \frac{1}{2}mv^2$$

Aplicando a conservação da energia mecânica,

$$\frac{1}{2}mv^2 = -mg\Delta x_{\max} \sin 10^\circ + \frac{1}{2}k(\Delta x_{\max})^2$$

$$v^2 = \frac{-2mg\Delta x_{\max} \sin 10^\circ}{m} + \frac{k(\Delta x_{\max})^2}{m}$$

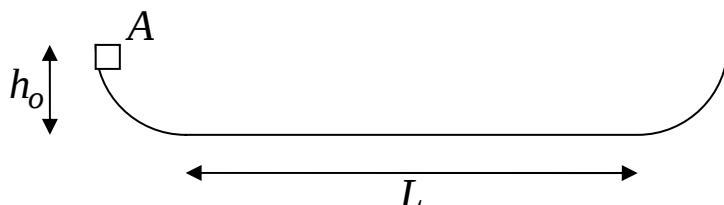
$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{-2 \times 0.100 \text{ kg} \times 10 \text{ m/s}^2 \times 5.00 \times 10^{-2} \text{ m} \times \sin 10^\circ}{0.100 \text{ kg}} + \frac{120 \text{ N/m} \times (5.00 \times 10^{-2} \text{ m})^2}{0.100 \text{ kg}} \\ &= 2.83 (\text{m/s})^2 \end{aligned}$$

$$v = 1.68 \text{ m/s}$$

.....

Questão 1

Uma partícula pode deslizar ao longo de uma pista com as extremidades elevadas e uma parte central plana de comprimento L como se mostra na figura. Não há atrito nas partes curvas mas, na parte plana, o coeficiente de atrito cinético é 0,15. A partícula é abandonada sem velocidade inicial no ponto A, a uma altura $h_0 = L/2$. Em que ponto da parte plana irá parar a partícula?



Resolução

.....
A variação da energia mecânica é igual ao trabalho feito pela força de atrito.

$E_i = mgh_0$ já que a energia cinética inicial é nula

$E_f = 0$ porque a energia cinética final também é nula e escolhemos o nível a que a partícula pára como o nível zero para a energia potencial gravítica. Temos então:

$-mg h_0 = -f_c d$ e $d = nL + x$, sendo d a distância total percorrida pela partícula na parte plana até parar, n um número inteiro e $x < L$. Neste caso o trabalho é igual ao simétrico do produto da força de atrito pela distância percorrida, porque a força é constante, com a mesma direcção do deslocamento e sempre com sentido oposto.

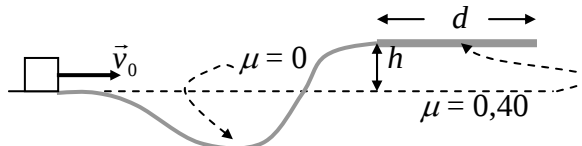
$$mg h_0 = f_c (nL + x) \quad mg L/2 = \mu_c mg (nL + x) \quad L = 2 \mu_c (nL + x)$$

$$L/(2 \mu_c) - nL = x \quad 3,33 L - nL = x \quad n = 3 \quad \text{e} \quad x = 0,33 L, \text{ distância contada a partir do lado direito da parte plana.}$$

Questão 2

O corpo representado segue a trajectória curva, passando de um nível para outro mais elevado.

Em todo o percurso curvo segue sem atrito. No nível mais alto entra num trajecto rectilíneo de atrito cinético igual a 0,4 (a risco grosso) e pára ao fim de uma distância percorrida igual a d .



Considere $v_0 = 6,0 \text{ m/s}$, $h = 1,0 \text{ m}$. Faça $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- Determine d .
- Determine a aceleração no troço com atrito.
- Determine o tempo gasto nesta parte do trajecto.

Resolução

.....
 a) A variação da energia mecânica é igual ao trabalho da força de atrito. Considerando para a energia potencial gravítica o nível zero, como o nível de que parte o corpo, temos:

$$\Delta E = W_{atr} \Rightarrow mgh - \frac{1}{2}mv_0^2 = -f_c d \Rightarrow 2gh - v_0^2 = -2\mu_c g d \Rightarrow$$

$$-16 = -8d \Rightarrow d = 2,0 \text{ m}$$

b) $a = f_c/m = \mu g = 4,0 \text{ m/s}^2$ com sentido negativo

c) $v = v_0' - at$, em que v_0' é a velocidade inicial no trajecto com atrito, que se pode calcular por conservação de energia

$$\frac{1}{2}mv_0'^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v_0'^2 = 2gh + v_0^2 \Rightarrow v_0' = 4,0 \text{ m/s}$$

$$0 = 4 - 4t \Rightarrow t = 1,0 \text{ s}$$

.....

Questão 1

Um bloco de 2,0 kg, foi empurrado de modo a comprimir 15 cm uma mola ideal, horizontal, de constante igual a 200 N/m. O sistema mola-bloco está em cima de uma mesa. Libertado na posição acima indicada, o bloco, atirado pela mola, desliza sobre a mesa até parar a uma distância de 75 cm da posição inicial. Qual é o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a mesa. Quanta energia se perdeu sob a forma de energia térmica?

Resolução

a) Sabendo que:

- i) a variação da energia mecânica é igual ao trabalho da força de atrito;
- ii) na situação final a energia mecânica é nula, porque ambas as energias, potencial e cinética, são nulas e no início a energia mecânica é igual à energia potencial elástica da mola comprimida;
- iii) o trabalho da força de atrito, sendo esta constante e oposta ao deslocamento é negativo e em valor igual ao produto da força pela distância percorrida;

temos:

$$0 - (1/2)kx^2 = -f_c d \Rightarrow (1/2)kx^2 = \mu_c P d \Rightarrow \mu_c = 0,15$$

b) Foi perdida toda a energia potencial armazenada na mola comprimida, ou seja:

$$(1/2)kx^2 = 2,25 \text{ J}$$

Questão 2

Uma caixa de 200 kg é puxada ao longo de uma superfície por um motor. O coeficiente de atrito cinético entre a caixa e a superfície é 0.40.

- a) Qual é a potência fornecida pelo motor para mover a caixa a 5.0 m/s?
- b) Qual o trabalho realizado pelo motor durante 3.0 min?

Resolução

a) O módulo da força de atrito é $f_c = \mu_c P = 0.40 \times 200 \text{ kg} \times 10 \text{ m/s}^2 = 8.0 \times 10^2 \text{ N}$. Vamos supor que a aceleração da caixa é nula. Como a força do motor e a força de atrito têm a mesma direcção mas sentidos opostos, o módulo da força do motor resulta de

$$F - f_c = 0$$

$$F = 8.0 \times 10^2 \text{ N}$$

O trabalho desta força durante um segundo (a potência do motor) é

$$P = 8.0 \times 10^2 \text{ N} \times 5.0 \text{ m/s}$$

$$= 4.0 \times 10^3 \text{ J/s}$$

$$= 4.0 \times 10^3 \text{ W}$$

$$\text{b) } W = P \times \Delta t$$

$$= 4.0 \times 10^3 \text{ W} \times 180 \text{ s}$$

$$= 7.2 \times 10^5 \text{ J}$$

Questão 1

Um bloco de 2,0 kg, foi empurrado de modo a comprimir 15 cm uma mola ideal, horizontal, de constante igual a 200 N/m. O sistema mola-bloco está em cima de uma mesa. Libertado na posição acima indicada, o bloco, atirado pela mola, desliza sobre a mesa até parar a uma distância de 75 cm da posição inicial. Qual é o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a mesa. Quanta energia se perdeu sob a forma de energia térmica?

Resolução

a) Sabendo que:

- i) a variação da energia mecânica é igual ao trabalho da força de atrito;
- ii) na situação final a energia mecânica é nula, porque ambas as energias, potencial e cinética, são nulas e no início a energia mecânica é igual à energia potencial elástica da mola comprimida;
- iii) o trabalho da força de atrito, sendo esta constante e oposta ao deslocamento é negativo e em valor igual ao produto da força pela distância percorrida;

temos:

$$0 - (1/2)kx^2 = -f_c d \Rightarrow (1/2)kx^2 = \mu_c P d \Rightarrow \mu_c = 0,15$$

b) Foi perdida toda a energia potencial armazenada na mola comprimida, ou seja:

$$(1/2)kx^2 = 2,25 \text{ J}$$

Questão 2

Uma caixa de 200 kg é puxada ao longo de uma superfície por um motor. O coeficiente de atrito cinético entre a caixa e a superfície é 0.40.

- a) Qual é a potência fornecida pelo motor para mover a caixa a 5.0 m/s?
- b) Qual o trabalho realizado pelo motor durante 3.0 min?

Resolução

a) O módulo da força de atrito é $f_c = \mu_c P = 0.40 \times 200 \text{ kg} \times 10 \text{ m/s}^2 = 8.0 \times 10^2 \text{ N}$. Vamos supor que a aceleração da caixa é nula. Como a força do motor e a força de atrito têm a mesma direcção mas sentidos opostos, o módulo da força do motor resulta de

$$F - f_c = 0$$

$$F = 8.0 \times 10^2 \text{ N}$$

O trabalho desta força durante um segundo (a potência do motor) é

$$P = 8.0 \times 10^2 \text{ N} \times 5.0 \text{ m/s}$$

$$= 4.0 \times 10^3 \text{ J/s}$$

$$= 4.0 \times 10^3 \text{ W}$$

$$\text{b) } W = P \times \Delta t$$

$$= 4.0 \times 10^3 \text{ W} \times 180 \text{ s}$$

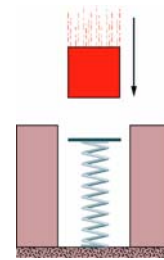
$$= 7.2 \times 10^5 \text{ J}$$

Questão 3

Um bloco de 250 g de massa é largado verticalmente de encontro a uma mola de constante elástica $k = 2,5 \text{ Ncm}^{-1}$, tal como se mostra na figura seguinte. Após o bloco ficar em contacto com a mola, esta sofre uma compressão de 12 cm.

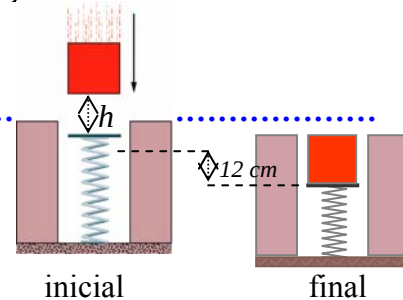
a) De que altura medida a partir da extremidade superior da mola (não-comprimida) é que cai o bloco?

b) Qual é o valor da velocidade do bloco no instante em que toca na mola.



Resolução

a) Pode ser usado o princípio de conservação de energia aplicado às situações inicial e final representadas. Na inicial, com o corpo em repouso, só há energia potencial gravítica; na final com o corpo de novo em repouso só há energia potencial elástica (tomando esta posição como o nível zero da energia potencial gravítica). Então:



$$E_i = E_f \Rightarrow mg(h + 0,12) = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow 0,25 \times 9,8(h + 0,12) = 0,5 \times 250 \times 0,12^2 \Rightarrow$$

$$2,45h = 1,8 - 0,294 \Rightarrow h = 0,61 \text{ m}$$

b) O raciocínio é o mesmo. Tomando como inicial a mesma situação da alínea a) e final a situação em que o bloco toca na mola depois de ter descido a altura h (aí só tem energia cinética, já que a potencial gravítica se pode considerar nula e a potencial elástica é também nula, porque a mola não está comprimida), vem:

$$E_i = E_f \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 9,8 \times 0,61 = 0,5 \times v^2 \Rightarrow v = 3,5 \text{ m/s}^2$$

Questão 1

Uma partícula de massa igual a $1,00 \times 10^{-20}$ kg tem um movimento harmónico simples de período igual a $1,00 \times 10^{-5}$ s e tem uma velocidade máxima de $1,00 \times 10^3$ m/s. a) Qual é a frequência angular do movimento? b) Qual é a amplitude do movimento?

Resolução

$$\text{a) } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \times 10^5 \text{ rad/s}$$

$$\text{b) } v = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow v_{\max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{1,00 \times 10^3}{2\pi \times 10^5} = 1,59 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Questão 2

Um corpo que desliza sem atrito preso a uma mola de constante igual a 400 N/m, tem num dado instante t os valores seguintes para a sua posição (medida a partir da posição de equilíbrio), velocidade e aceleração: $x = 0,100$ m; $v = -13,6$ m/s ; $a = -123$ m/s². Determine: a) a frequência de oscilação; b) a massa do bloco; c) a amplitude do movimento.

Resolução

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$a = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

$$a = -\omega^2 x \Rightarrow \omega = \sqrt{-\frac{a}{x}} \Rightarrow \omega = 35,1 \text{ rad/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 5,58 \text{ Hz}$$

$$\text{b) } a = -\omega^2 x \Rightarrow \omega^2 = -\frac{a}{x} = \frac{k}{m} \Rightarrow m = \frac{400}{1230} = 0,325 \text{ kg}$$

$$\text{c) } \begin{aligned} x^2 &= A^2 \cos^2(\omega t + \phi) \\ v^2 &= \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \end{aligned} \Rightarrow x^2 + v^2 / \omega^2 = A^2$$

$$A = \sqrt{0,010 + 0,150} = 0,400 \text{ m}$$

Questão 1

Um pêndulo simples de comprimento ℓ , é largado em repouso a um ângulo θ_0 com a vertical. a) Assumindo que o seu movimento consequente é harmónico simples, determine (em termos de ℓ , g e θ_0) a sua velocidade para $\theta = 0$; b) Partindo do princípio de conservação de energia mecânica, determine (em termos de ℓ , g e θ_0) a sua velocidade para $\theta = 0$ e mostre que a expressão encontrada em a) é equivalente à de b) se θ_0 for um ângulo pequeno, o que implica $\cos \theta_0 \approx 1 - \frac{1}{2}\theta_0^2$; c) calcule a diferença entre os resultados de a) e b) para $\ell=1,0$ m e $\theta_0 = 0,20$ rad e para $\ell=1,0$ m e $\theta_0 = 1,0$ rad e comente; faça $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Resolução

a) $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$; $\theta = \theta_m \cos(\omega t + \phi)$; para as condições iniciais dadas vem

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t) \Rightarrow v = \ell \frac{d\theta}{dt} = -\ell \omega \theta_0 \sin(\omega t) \quad \text{para } \theta = 0 \rightarrow \cos(\omega t) = 0 \text{ e}$$

$$\sin(\omega t) = 1 \Rightarrow v = -\ell \omega \theta_0 \Rightarrow v^2 = \ell g \theta_0^2$$

b) Chamando h à altura de que o corpo parte ela pode ser dada por $h = \ell - \ell \cos \theta$;

aplicando o princípio de conservação de energia mecânica, vem $\frac{1}{2}mv^2 - mgh = 0$

$$v^2 = 2gh \Rightarrow v^2 = 2g\ell(1 - \cos \theta_0) \quad \text{expressão exacta; para pequenos ângulos}$$

$$\cos \theta_0 \approx 1 - \frac{1}{2}\theta_0^2, \text{ então } v^2 = 2g\ell \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2}\theta_0^2 \right) \right] \Rightarrow v^2 = g\ell \theta_0^2 \quad \text{igual à expressão}$$

anterior.

c) Para $\theta_0 = 0,20$ rad ($\theta_0 = 11,5^\circ$) $\rightarrow$

$$v^2 = \ell g \theta_0^2 = 0,400 \text{ m}^2/\text{s}^2 \quad \text{e} \quad v^2 = 2g\ell(1 - \cos \theta_0) = 0,398 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Para $\theta_0 = 1,0$ rad ($\theta_0 = 57^\circ$)

$$v^2 = \ell g \theta_0^2 = 1,00 \text{ m}^2/\text{s}^2 \quad \text{e} \quad v^2 = 2g\ell(1 - \cos \theta_0) = 0,92 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

A primeira situação corresponde a um ângulo pequeno (o afastamento entre os dois resultados é de 5 em mil, em geral abaixo da precisão com que se consegue medir; no segundo caso já há um afastamento de 8% em v^2 , de 4% em v).

Questão 2

Um corpo de 2,0 kg desliza preso a uma mola de constante igual a 400 N/m, tendo uma amplitude inicial de 3,0 cm. A sua energia mecânica decresce 1% por período (natural).

Determine: a) a energia mecânica inicial; b) a constante de amortecimento b ; c) a frequência de oscilação.

Resolução

a) $E_0 = \frac{1}{2} k A_0^2 = 200 \times (0,03)^2 = 0,18 \text{ J}$

b) $E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k [A_0 \exp(-\frac{b}{2m} t)]^2 = E_0 \exp(-\frac{b}{m} t)$

para $t = T = 2\pi/\omega_0$, vem

$$\frac{E}{E_0} = \exp(-\frac{b}{m} \times \frac{2\pi}{\omega_0}) \Rightarrow \ln(\frac{E}{E_0}) = -\frac{b}{m} \times 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow \ln(0,99) = -0,222 \times b \Rightarrow b = 0,045 \text{ kg/s}$$

c) $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (\frac{b}{2m})^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{b}{2m})^2} = \sqrt{200 - 1,265 \times 10^{-4}} = 14 \text{ rad/s} \quad (\omega_0 = 14 \text{ rad/s})$

Questão 1

Três bolas A, B e C com massas iguais a 3 kg, 2 kg e 1 kg, respectivamente, ocupam num dado momento as posições no plano XY: (2,2); (1,3); e (4,0), respectivamente, sendo as coordenadas dadas em metro. a) Calcule o centro de massa do sistema. Sabendo que as suas velocidades em m/s são no mesmo momento, $\vec{v}_A = 3\vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{v}_B = 2\vec{i} - 2\vec{j}$; $\vec{v}_C = -\vec{i} + 4\vec{j}$, determine a velocidade do centro de massa.

Resolução

$$\text{a) } \vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{6} [3 \times (2\vec{i} + 2\vec{j}) + 2 \times (\vec{i} + 3\vec{j}) + 4\vec{i}] = (2\vec{i} + 2\vec{j}) \text{ m}$$

$$\text{b) } \vec{v}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{6} [3 \times (3\vec{i} + 2\vec{j}) + 2 \times (2\vec{i} - 2\vec{j}) + (-\vec{i} + 4\vec{j})] = (2\vec{i} + \vec{j}) \text{ m/s}$$

Questão 2

Considere o sistema de 2 partículas, 1 e 2, de massas iguais a 1 kg e 2 kg, respectivamente, tais que: a partícula 1 tem velocidade constante, dada em m/s por $\vec{v}_1 = 2\vec{i} - \vec{j}$, a partícula 2 tem aceleração constante, dada em m/s² por $\vec{a}_2 = 4\vec{j}$. No instante inicial ambas as partículas estão na posição (0,0) e a partícula 2 tem uma velocidade inicial, dada em m/s por $\vec{v}_{20} = 2\vec{i}$. Determine para o instante $t = 2$ s, a velocidade do centro de massa e a posição do centro de massa.

Resolução

$$\vec{v}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = 2\vec{i} + 4t\vec{j} \quad \text{Para } t = 2 \text{ s} \rightarrow \vec{v}_2 = 2\vec{i} + 8\vec{j}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{3} [(2\vec{i} - \vec{j}) + 2 \times (2\vec{i} + 8\vec{j})] = (2\vec{i} + 5\vec{j}) \text{ m/s}$$

$$\vec{r}_1 = 2t\vec{i} - t\vec{j} \quad \text{e} \quad \vec{r}_2 = 2t\vec{i} + 2t^2\vec{j} \quad \text{Para } t = 2 \text{ s} \rightarrow \vec{r}_1 = 4\vec{i} - 2\vec{j} \quad \text{e} \quad \vec{r}_2 = 4\vec{i} + 8\vec{j}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{3} [(4\vec{i} - 2\vec{j}) + 2 \times (4\vec{i} + 8\vec{j})] = (4\vec{i} + \frac{14}{3}\vec{j}) \text{ m/s}$$

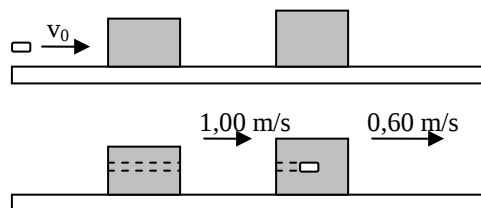
Podia ser reduzido a um problema de cinemática de partícula única, o centro de massa, para o qual se deduziria a velocidade inicial ($\vec{v}_{CM0} = 2\vec{i} - (1/3)\vec{j}$), a posição inicial (0,0) e a aceleração

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}}{\sum_i m_i} = \frac{2 \times \vec{a}_2}{3} = \frac{8}{3}\vec{j} : \quad \vec{v}_{CM} = \vec{v}_{CM0} + \vec{a}_{CM} t$$

$$\vec{r}_{CM} = \vec{v}_{CM0} t + \frac{1}{2} \vec{a}_{CM} t^2$$

Questão 1

1. Uma bala de 3,0 g é disparada contra dois blocos de madeira em repouso sobre uma mesa polida (na qual eles se podem mover com atrito desprezável). A bala passa através do primeiro bloco, de 1,2 kg de massa, e incrusta-se no segundo, que tem 1,8 kg de massa. Os blocos ficam com velocidades iguais a 1,00 e 0,60 m/s, respectivamente.



Desprezando a massa removida do primeiro bloco determine:

- a velocidade com que a bala sai do primeiro bloco;
- a velocidade inicial da bala.
- A colisão da bala com o primeiro bloco é elástica? Justifique.

a) Na interacção bala-bloco há conservação do momento linear (desprezando o efeito da gravidade sobre a bala, o que está explícito na figura da trajectória da mesma)

A velocidade com que a bala sai do primeiro bloco é a velocidade inicial com que interacciona com o segundo bloco. Então, tendo em conta os sentidos das velocidades, usando o índice b para a bala e 2 para o segundo bloco

$$m_b v_b = (m_b + m_2) v_{2f} \Rightarrow 0,003 v_b = 1,803 \times 0,6 \Rightarrow v_b = 361 \text{ m/s}$$

b) Considerando a colisão com o primeiro bloco, temos

$$m_b v_0 = m_b v_b + m_1 v_1 \Rightarrow 0,003 v_0 = 0,003 \times 361 + 1,2 \times 1 \Rightarrow v_0 = 761 \text{ m/s}$$

c) Para a colisão ser elástica é preciso haver conservação da energia cinética.

$$E_{ci} = \frac{1}{2} m_b v_0^2 = \frac{1}{2} \times 0,003 \times 761^2 = 868 \text{ J}$$

$$E_{cf} = \frac{1}{2} m_b v_b^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \times 0,003 \times 361^2 + 0,6 = 196 \text{ J}$$

A energia cinética final é inferior à inicial, pelo que a colisão não é elástica.

Questão 2

Uma bola de 60 g é lançada com uma velocidade de 10 m/s na perpendicular contra uma parede, vindo em seguida no sentido oposto a 8,0 m/s. a) Qual o impulso (valor, direcção e sentido) transmitido à parede? Admitindo que a interacção entre a bola e a parede se dá num intervalo de tempo de 3,0 ms, qual é a força média (valor, direcção e sentido) exercida pela bola sobre a parede? c) A bola é de seguida apanhada pela mão do jogador que a pára. Neste processo, no qual se pode considerar que a força exercida pelo jogador é constante, a sua mão recua 5,0 cm. Qual é o impulso (valor, direcção e sentido) recebido pelo jogador? d) Qual é a força (valor, direcção e sentido) exercida sobre o jogador pela bola. Na resolução desta questão despreze o efeito da gravidade sobre a bola.

a) Considera-se inicialmente o sistema bola-parede. Desprezando a gravidade, vai haver conservação do momento linear do sistema. Considerando o eixo X como perpendicular à parede, sendo o sentido positivo o do movimento inicial da bola:

$$\begin{aligned}\vec{p}_i &= 0,06 \times 10 \vec{i} = 0,60 \vec{i} \text{ kgm/s} \\ \vec{p}_f &= -0,06 \times 8 \vec{i} + \vec{p}_{parede} \\ \vec{J} &= \Delta \vec{p}_{parede} = 1,08 \vec{i} \text{ kgm/s}\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{parede} = (0,6 + 0,48) \vec{i} \text{ kgm/s} \quad \Rightarrow$$

$$\text{b) } \vec{J} = \vec{F} \Delta t \Rightarrow 1,08 \vec{i} = \vec{F} \times 0,003 \Rightarrow \vec{F} = 360 \vec{i} \text{ N}$$

c) Considera-se o sistema bola-jogador. Desprezando a gravidade, vai haver conservação do momento linear do sistema.

$$\begin{aligned}\vec{p}_i &= -0,06 \times 8 \vec{i} = -0,48 \vec{i} \text{ kgm/s} \\ \vec{p}_f &= 0 + \vec{p}_{jogador} \\ \vec{J} &= \Delta \vec{p}_{jogador} = -0,48 \vec{i} \text{ kgm/s}\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{jogador} = -0,48 \vec{i} \text{ kgm/s} \quad \Rightarrow$$

d) Com força constante a aceleração da bola é constante. Assim:

$$\begin{aligned}v &= v_0 - at \\ x &= v_0 t - \frac{1}{2} at^2 \quad \text{para } v = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{v_0^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{64}{0,1} = 640 \text{ m/s}^2 \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$F = ma = 0,06 \times 640 \text{ m/s}^2 = 384 \text{ N}$$

Tendo em atenção que a aceleração, oposta à velocidade, tem o sentido positivo, a força exercida pelo jogador sobre a bola pode escrever-se: $\vec{F}_{jb} = 384 \vec{i} \text{ N}$

A força exercida pela bola sobre o jogador (por acção-reacção) é oposta a esta: $\vec{F}_{bj} = -384 \vec{i} \text{ N}$

Questão 1

Um disco de 12 cm de raio roda em torno do seu centro, na horizontal, com uma aceleração angular de $8,0 \text{ rad/s}^2$. a) Sabendo que no instante inicial estava em repouso, qual é a sua velocidade angular para $t = 5,0 \text{ s}$? b) Quanto valem a sua aceleração tangencial e a centrípeta no mesmo instante? Quanto vale a velocidade de um ponto do disco a 5,0 cm do centro do mesmo?

Resolução

$$\text{a) } \omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \omega = 8t \Rightarrow \omega(t = 5) = 40 \text{ rad/s}$$

$$\text{b) } a_t = \alpha R \Rightarrow a_t = 8 \times 0,12 = 0,96 \text{ m/s}^2$$

$$a_c = \omega^2 R \Rightarrow a_c = 1600 \times 0,12 = 192 \text{ m/s}^2$$

$$\text{c) } v = \omega R' \Rightarrow v = 40 \times 0,05 = 2,0 \text{ m/s}$$

.....

Questão 2

Um disco de 50 cm de raio roda a uma velocidade angular de $6\pi \text{ rad/s}$. Num dado instante é-lhe aplicado na periferia um travão, que lhe imprime uma aceleração tangencial, que contraria o movimento, com o valor de $\pi/10 \text{ m/s}^2$. Quanto tempo demora o disco a parar e quantas voltas dá nesse tempo?

Resolução

$$\alpha = \frac{a_t}{R} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{5} \text{ rad/s}^2$$

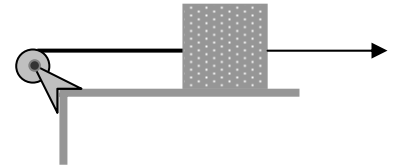
$$\omega = \omega_0 - \alpha t \Rightarrow 0 = 6\pi - \frac{\pi}{5}t \Rightarrow t = 30 \text{ s}$$

$$\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2} \alpha t^2 \Rightarrow \theta = 180\pi - \frac{\pi}{10} \times 900 \Rightarrow \theta = 90\pi \text{ rad} \Rightarrow \text{n}^\circ \text{ devoltas} = \frac{90\pi}{2\pi} = 45$$

.....

Questão 1

Um corpo de massa m está ligado a um fio ideal por sua vez enrolado em torno de uma roldana com raio R e momento de inércia relativamente ao seu eixo igual a I . O eixo da roldana está fixo. O corpo desliza numa superfície horizontal com um coeficiente de atrito cinético igual a μ . Aplica-se a força $\vec{F}$ tal como indicado na figura.

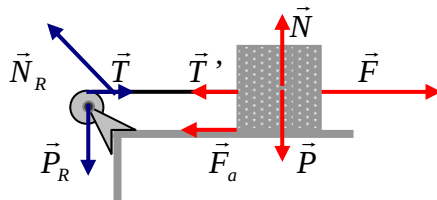


- Represente as forças aplicadas no corpo e na roldana.
- Determine o momento das forças aplicadas na roldana relativamente ao seu centro de massa (só as expressões, sem cálculo numérico). Escreva a segunda lei de Newton para a rotação da roldana.
- Escreva a segunda lei de Newton para a translação do corpo. Determine a aceleração angular da roldana.
- Quantas voltas dá a roldana em 10 s?

Use os seguintes dados: $R = 0,20$ m; $I = 0,080$ kgm²; $m = 2,0$ kg; $\mu = 0,1$; $F = 3,0$ N. Faça $g = 10$ m/s².

Resolução

a)



A azul as forças aplicadas na roldana e a vermelho as aplicadas no corpo. $T = T'$.

b) O peso e a reacção normal do apoio do eixo têm momento nulo relativamente ao centro de massa da roldana, já que na expressão do momento $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{P}_R$, o vector $\vec{r}$ referente ao peso é nulo, porque o peso está aplicado no ponto de referência do momento (neste caso o CM); em relação à reacção normal, o vector $\vec{r}$ é paralelo, pelo que o momento também é nulo.

Sobra apenas o momento da tensão: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{T} \Rightarrow \tau = \|\vec{\tau}\| = RT$

perpendicular ao plano da figura e dirigido no sentido oposto ao observador

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \Rightarrow \tau = I\alpha \Rightarrow RT = I\alpha$$

$$c) \vec{T} + \vec{F}_a + \vec{N} + \vec{P} + \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F - F_a - T = ma \quad \text{e} \quad P - N = 0$$

$$F - F_a - T = ma \Rightarrow F - \mu N - T = mR\alpha \Rightarrow F - \mu N = (I/R + mR)\alpha$$

$$RT = I\alpha \Rightarrow T = I\alpha / R$$

$$3 - 2 = (0,08/0,2 + 0,4)\alpha \Rightarrow \alpha = 1,25 \text{ rad/s}^2$$

d) Sendo a velocidade inicial nula pode escrever-se

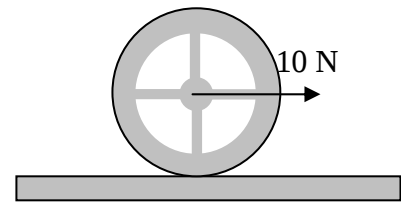
$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\theta = 0,625t^2 \Rightarrow \theta = 0,625 \times 100 = 62,5 \text{ rad} \Rightarrow$$

$$n^\circ \text{ de voltas} = \theta / 2\pi = 10 \text{ voltas}$$

Questão 2

Uma força constante, horizontal, de 10 N, é aplicada à roda representada, que tem 10 kg de massa e 0,30 m de raio. A roda rola (sem deslizar) sobre a superfície horizontal sendo a aceleração do seu centro de massa igual a 0,60 m/s².



- Quanto vale e qual é a direcção da força de atrito que actua na roda?
- Quanto vale o momento de inércia da roda referido ao eixo de rotação que passa pelo seu centro de massa (use as leis da dinâmica e do rolamento)?
- Qual é a energia cinética da roda após 2,0 s, supondo que no instante $t = 0$ a roda estava em repouso.

Resolução

a) Como a roda avança para a direita com velocidade crescente, tem de rodar a velocidade angular crescente no sentido horário. Logo a aceleração angular e a resultante dos momentos das forças relativos ao centro de massa têm de apontar perpendicularmente à figura no sentido oposto ao observador ($\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$). Como o peso, a normal e a força aplicada têm momentos nulos relativos ao centro de massa, a aceleração angular tem de ser providenciada pelo atrito.

Então tendo em conta a definição de momento de força $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, relativo ao CM, em que $\vec{r}$ é um vector dirigido do centro de massa para o ponto de aplicação da força, a força de atrito tem sentido oposto ao da força representada. Por outro lado, se na horizontal só actuasse a força representada o corpo teria uma aceleração do centro de massa igual a $10/10 = 1,0 \text{ m/s}^2$. Como a aceleração é inferior a esta, isto mostra que a força de atrito tem um sentido contrário à força aplicada. Quanto ao valor podemos escrever então

$$F - F_a = ma_{CM} \quad \Rightarrow \quad 10 - F_a = 6 \quad \Rightarrow \quad F_a = 4,0 \text{ N}$$

b) Da relação dinâmica para a rotação em torno de um eixo e da relação entre a_{cm} e aceleração angular para o caso do rolamento puro, temos

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_a \quad \Rightarrow \quad \tau = RF_a$$

$$RF_a = I\alpha \quad \Rightarrow \quad RF_a = I \frac{a_{CM}}{R} \quad \Rightarrow \quad 0,30 \times 4,0 = I \frac{0,6}{0,3} \quad \Rightarrow \quad I = 0,60 \text{ kgm}^2$$

c) A energia cinética será dada por

$$E_c = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = 5v_{CM}^2 + 0,3\frac{v_{CM}^2}{R^2} = 5v_{CM}^2 + 0,3\frac{v_{CM}^2}{0,3^2} = 8,33v_{CM}^2$$

com v_{CM} referido ao instante $t=2,0\text{s}$, que se pode calcular de:

$$a_{CM} = Cte \quad \Rightarrow \quad v_{CM} = v_{CM0} + a_{CM}t$$

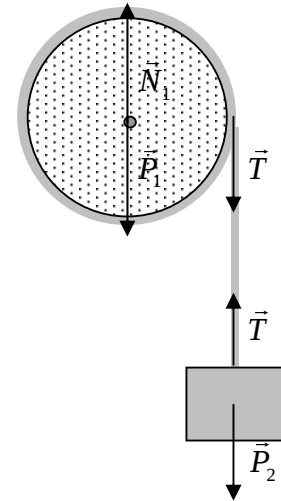
$$v_{CM} = 0,6 \times 2,0 = 1,2 \text{ m/s}$$

$$E_c = 8,33v_{CM}^2 = 12 \text{ J}$$

.....

Questão 1

Uma roldana de 1,0 kg de massa e 0,40 m de raio, pode rodar (sem atrito) em torno de um eixo perpendicular à figura passando pelo seu centro. Uma corda ideal, sem massa, está enrolada em torno da periferia da roldana e sustenta um corpo de 3,0 kg de massa. No instante inicial, quando o corpo é largado, o sistema está em repouso.



- Represente as forças que actuam no corpo e na roldana.
- Determine a aceleração do corpo suspenso. Determine a tensão na corda.
- Qual a velocidade que o corpo atinge após uma descida de 0,40 m?
- Qual é a velocidade angular da roldana no instante referido em d)?

Resolução:

a) As forças estão representadas na figura.

b) Para o corpo suspenso temos:

$$\vec{P}_2 + \vec{T} = m_2 \vec{a} \quad \Rightarrow \quad P_2 - T = m_2 a$$

Para a roldana, como o seu peso e a normal têm momento nulo relativamente ao centro de massa temos:

$$\vec{\tau} = I \vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad RT = \frac{1}{2} m_1 R^2 \alpha \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} m_1 R \frac{a_t}{R} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} m_1 a$$

visto que a aceleração tangencial dos pontos na periferia da roldana é igual à aceleração do corpo suspenso. Substituindo T na expressão do corpo obtemos

$$m_2 g - \frac{1}{2} m_1 a = m_2 a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m_2}{m_2 + m_1/2} g = \frac{3}{3 + 0,5} \times 10 = 8,6 \text{ m/s}^2$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 a = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_2 + m_1/2} g = 4,3 \text{ N}$$

ou

$$T = \frac{1}{2} m_1 a = 0,5 \times 8,6 = 4,3 \text{ N}$$

c) Por cinemática, analisando o movimento do corpo suspenso, unidimensional, ao longo do eixo dos Y orientado para baixo, partindo do ponto $y = 0$, com velocidade inicial igual a zero, vem:

$$a = C^{te} \quad \Rightarrow \quad v_2 = at \quad \Rightarrow \quad y_2 = \frac{1}{2} at^2$$

$$v_2^2 = 2ay_2$$

$$y_2 = 0,4 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad v_2^2 = 17,2 \times 0,4 = 6,85 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 2,6 \text{ m/s}$$

ALTERNATIVAMENTE, para ser resolvido por considerações de trabalho e energia, usando por exemplo o corpo suspenso, era preciso não esquecer que a Tensão também realiza trabalho.

Para o corpo suspenso, o trabalho da resultante das forças que actuam sobre ele é igual à variação da sua energia cinética. A resultante é uma força constante dirigida para baixo igual a:

$$F_2 = P_2 - T = 30 - 4,3 = 25,7 \text{ N}$$

Sendo constante e dirigida ao longo do eixo dos Y o trabalho que realiza num deslocamento y_2 vale:

$$W = F_2 y_2$$

Para o deslocamento de 0,4 m atendendo a que o corpo parte do repouso temos

$$F_2 y_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad \Rightarrow \quad 25,7 \times 0,4 = 1,5 v_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 2,6 \text{ m/s}$$

Poderia ainda ser resolvido por conservação da energia mecânica, não esquecendo a roldana. A energia mecânica inicial é igual à potencial gravítica do corpo suspenso; a final é igual à soma das energias cinéticas do corpo e da roldana:

$$m_2 gh = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \Rightarrow \quad m_2 gh = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{4} m_1 R^2 \omega^2 \quad \Rightarrow \quad m_2 gh = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{4} m_1 v_2^2$$

Quando o corpo suspenso tem velocidade v_2 , também os pontos da periferia da roldana têm essa velocidade, pelo que a roldana terá uma velocidade angular dada por v_2/R . Assim

$$m_2 gh = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{4} m_1 v_2^2 \quad \Rightarrow \quad 3 \times 10 \times 0,4 = 1,5 v_2^2 + 0,25 v_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 2,6 \text{ m/s}$$

$$d) \quad \omega = \frac{v_2}{R} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2,6}{0,4} = 6,5 \text{ rad/s}$$

ALTERNATIVAMENTE, para a roldana, que está também inicialmente em repouso:

$$\alpha = C^{te} \quad \Rightarrow \quad \omega = \alpha t \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{a}{R} t \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_2}{R} = 6,5 \text{ rad/s}$$

Questão 2

A uma bola de bowling de raio R é dada uma velocidade v_0 e uma velocidade angular inicial $\omega_0 = 3v_0/R$. O coeficiente de atrito cinético entre a bola e a pista é μ_c . a) Qual é a velocidade da bola quando começa a rolar sem deslizar? b) Durante quanto tempo é que a bola desliza antes de entrar em rolamento puro? c) Que distância percorre nesse tempo?

Resolução:

A velocidade angular inicial é mais elevada do que a que corresponde ao rolamento. O atrito actua no sentido de acelerar o movimento de translação (já que o ponto de contacto vai tender a deslizar para trás) e desacelerar o de rotação. Considerando a força de atrito constante e, portanto, também a aceleração, vem para a translação

$$\vec{f}_c = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad f_c = ma \quad \Rightarrow \quad \mu_c N = ma \quad \Rightarrow \quad \mu_c mg = ma \quad \Rightarrow \quad a = \mu_c g$$

$$v = v_0 + at \quad \Rightarrow \quad v = v_0 + \mu_c g t \quad (\text{eq.1})$$

O momento da força de atrito relativamente ao centro da bola vale

$$\tau = f_c R \quad \Rightarrow \quad \tau = \mu_c N R \quad \Rightarrow \quad \tau = \mu_c mg R \quad \text{e} \quad \tau = I \alpha$$

$$\text{em que } I = \frac{2}{5} m R^2, \text{ vindo } \frac{2}{5} m R^2 \alpha = \mu_c mg R \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{5}{2} \frac{\mu_c g}{R} \quad \text{e}$$

$$\omega = \omega_0 - \alpha t \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_0 - \frac{5}{2} \frac{\mu_c g}{R} t \quad (\text{eq 2})$$

Quando se inicia o rolamento puro $v = \omega R$, pelo que calculando o tempo pela eq 1 e substituindo na eq 2, tendo em conta que $v = \omega R$ e $\omega_0 = 3v_0 / R$, vem

$$v = \omega_0 R - \frac{5}{2} \mu_c g \times \frac{v - v_0}{\mu_c g} \Rightarrow v = 3v_0 - \frac{5}{2}(v - v_0) \Rightarrow 2v = 6v_0 + 5v_0 - 5v \Rightarrow v = \frac{11}{7} v_0$$

b) Da eq. 1 vem $t = \frac{v - v_0}{\mu_c g}$. Usando o resultado anterior vem $t = \frac{4}{7} \times \frac{v_0}{\mu_c g}$

c) A distância pode ser calculada por cinemática:

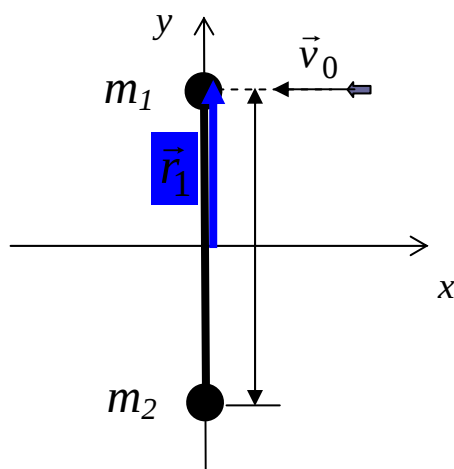
$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow x = v_0 t + \frac{1}{2} \mu_c g t^2 \Rightarrow x = \frac{4}{7} \times \frac{v_0^2}{\mu_c g} + \frac{8}{49} \times \frac{v_0^2}{\mu_c g} = \frac{36}{49} \times \frac{v_0^2}{\mu_c g} = 0,73 \times \frac{v_0^2}{\mu_c g}$$

Questão 1

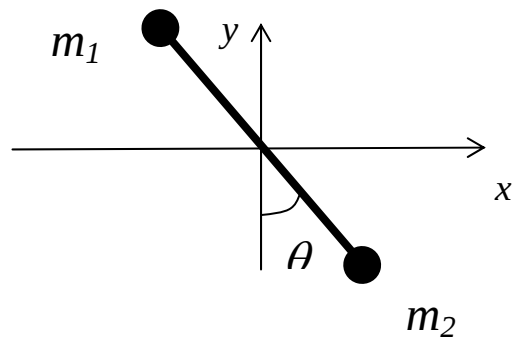
Uma vara rígida, de massa desprezável, tem duas esferas ligadas às suas extremidades (ver figura). As esferas, ambas com raio $R = 5$ cm, têm massas $m_1 = 300$ g e $m_2 = 200$ g e os seus centros de massa distam $d = 40$ cm. Este sistema, inicialmente na vertical, está sujeito apenas à acção da gravidade e pode rodar livremente em torno do ponto médio da vara que está fixo.

Uma bala de 10 g e que se pode considerar pontual, atinge, com velocidade igual a 40 m/s, a esfera m_1 onde fica incrustada.

- Considere que o processo de incrustação é instantâneo. Determine o vector (direcção, sentido e intensidade) momento angular total do sistema em relação à origem do referencial, imediatamente depois da bala ficar incrustada na esfera.
- Tendo em conta que o momento de inércia do sistema vara-esferas-bala não difere significativamente do momento de inércia do sistema vara-esferas, calcule a velocidade angular do sistema e a velocidade linear do centro de massa de cada uma das esferas no instante a que se refere a alínea anterior.



Antes da bala atingir a esfera



Depois da bala atingir a esfera

Resolução

a) Como o processo de incrustação é instantâneo o momento angular do sistema imediatamente depois da incrustação da bala é igual ao momento angular da bala no instante da incrustação. Calculado relativamente à origem do referencial ele é:

direcção : perpendicular ao plano xy (plano da folha)

$$\vec{L}_b = \vec{r}_1 \times m_b \vec{v}_0$$

sentido : "para cá" da folha

intensidade : $\|\vec{r}_1\| m_b \|\vec{v}_0\| \sin(90^\circ)$

onde $\vec{r}_1$ é o vector posicional do ponto de incrustação (ver figura).

$$\|\vec{L}_b\| = \frac{d}{2} m_b \|\vec{v}_0\| = \frac{4 \times 10^{-1}}{2} \times 10^{-2} \times 4 \times 10 = 8,0 \times 10^{-2} \text{ kgm}^2 \text{s}^{-1}$$

b) A velocidade angular do sistema num dado instante relaciona-se com o momento angular nesse instante através de $\vec{L} = I\vec{\omega}$, onde I é o momento de inércia do sistema relativamente ao eixo de rotação, isto é, o eixo com a direcção de $\vec{L}$ e que passa na origem do sistema de referência da figura.

O momento de inércia do sistema vara-esferas calculado relativamente a este eixo é:

$$I = \left[\frac{2}{5} m_1 R^2 + m_1 \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right] + \left[\frac{2}{5} m_2 R^2 + m_2 \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right]$$

Cada um dos termos entre parêntesis rectos é o momento de inércia devido a cada uma das esferas relativamente ao eixo de rotação calculado usando o teorema dos eixos paralelos.

$$I = (m_1 + m_2) \times \left[\frac{2}{5} R^2 + \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right] = 5 \times 10^{-1} \times (10^{-3} + 4 \times 10^{-2}) = 2,05 \times 10^{-2} \text{ kgm}^2$$

Pretendemos calcular a velocidade angular no instante em que $\vec{L} = \vec{L}_b$ (calculado na alínea anterior). Temos, portanto:

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{L}_b}{I} \Rightarrow \omega = \frac{8,0 \times 10^{-2}}{2,05 \times 10^{-2}} \approx 4 \text{ rad s}^{-1}$$

A direcção e o sentido são os mesmos que de $\vec{L}_b$

Como os centros de massa das esferas estão nesse instante a iniciar movimentos circulares de raio $d/2$ com velocidade angular 4 rad s^{-1} , a sua velocidade linear é

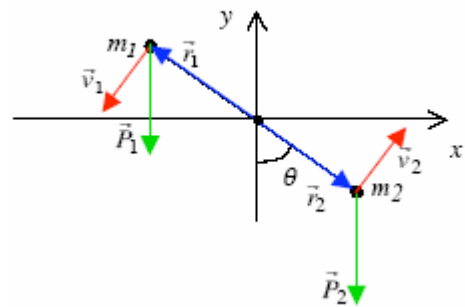
$$v_{CM} = \omega \frac{d}{2} = 4 \times 0,2 = 0,8 \text{ m/s}$$

Questão 2

Para o mesmo sistema da questão 1, a partir da relação entre a variação do momento angular e o momento das forças exteriores que actuam no sistema (tenha em conta a figura), obtenha a expressão para a aceleração do sistema após a incrustação da bala:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{2g(m_1 - m_2)}{d(m_1 + m_2)} \sin\theta$$

Comente a seguinte afirmação referindo-se à relação entre o momento das forças exteriores e a velocidade angular: “Se $m_1 = m_2$ o sistema rodará com velocidade angular constante”.



Resolução

O momento angular total do sistema relativamente à origem do referencial é :

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2$$

$$\vec{L}_1 = m_1 \|\vec{r}_1\| \|\vec{v}_1\| \vec{e}_z = m_1 \frac{d}{2} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z \quad \text{e} \quad \vec{L}_2 = m_2 \|\vec{r}_2\| \|\vec{v}_2\| \vec{e}_z = m_2 \frac{d}{2} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z$$

Tal como na alínea b) foi usada a relação entre a velocidade linear e a velocidade angular para cada uma das partículas, $v = \frac{d}{2} \omega = \frac{d}{2} \frac{d\theta}{dt}$. O versor tem a direcção perpendicular ao plano do movimento (xy) e aponta “para cá da folha”.

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \frac{d^2}{4} \frac{d\theta}{dt} (m_1 + m_2) \vec{e}_z \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d^2}{4} \frac{d^2\theta}{dt^2} (m_1 + m_2) \vec{e}_z \quad (1)$$

O momento resultante dos momentos das forças exteriores aplicadas a um sistema, calculado relativamente a um ponto é responsável pela variação do momento angular total do sistema em relação a esse ponto:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (2)$$

As forças exteriores aplicadas ao sistema em estudo que têm momento relativamente à origem são as forças gravíticas que actuam nas partículas 1 e 2, respectivamente $\vec{P}_1$ e $\vec{P}_2$. Os seus momentos são:

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 = \frac{d}{2} m_1 g \sin(\theta) \vec{e}_z \quad \text{e} \quad \vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{P}_2 = -\frac{d}{2} m_2 g \sin(\theta) \vec{e}_z$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \frac{d}{2} g \sin(\theta) (m_1 - m_2) \vec{e}_z \quad (3)$$

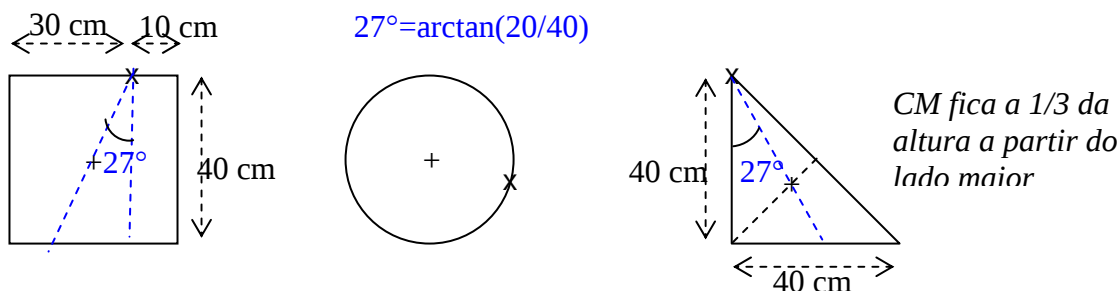
Substituindo em (2) os resultados (1) e (3), obtemos a equação do movimento:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{2g(m_1 - m_2)}{d(m_1 + m_2)} \sin(\theta)$$

Para $m_1 = m_2$, os momentos devidos a cada um dos pesos cancelam-se. Sendo nulo o momento das forças externas o momento angular do sistema não varia no tempo e consequentemente a velocidade angular é uma constante do movimento. Note-se que, para $m_1 = m_2$, a expressão que obtivemos na alínea anterior para a aceleração angular $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ conduz a valor zero como é de esperar tendo em conta a discussão anterior.

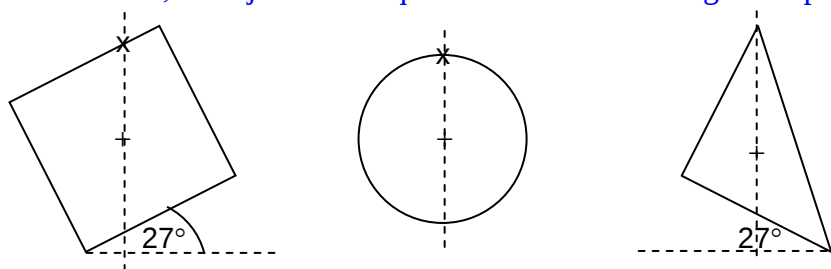
Questão 1

Cada um dos objectos com distribuição de massa homogênea, com o centro de massa indicado pelo símbolo +, é suspenso do tecto por um fio agarrado ao ponto marcado por x. Faça o diagrama dos objectos na sua situação de equilíbrio, justificando.



Resolução

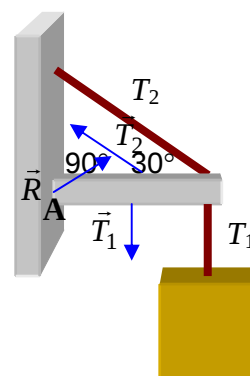
Quando qualquer dos objectos está suspenso, as forças aplicadas sobre ele são o seu peso (aplicado no CM e a tensão do fio (aplicada no ponto de suspensão). A tensão ~~ser~~ igual ao peso só garante o equilíbrio de translação. É preciso também que a resultante dos momentos das duas forças seja nula. Como o momento do peso relativamente ao centro de massa é nulo, é preciso que o momento da tensão seja também nulo, o que só se consegue se a tensão for paralela ao vector posicional do ponto de suspensão relativamente ao CM, o que implica o alinhamento destes dois pontos na mesma vertical. Tendo em atenção a geometria, ver na figura acima a azul, os objectos em equilíbrio estariam nas seguintes posições:



Questão 2

Um bloco de 80 N de peso está suspenso, por meio de um cabo com tensão T_1 , de uma trave, com massa desprezável, que articula no ponto A com um suporte vertical, preso a uma parede. Esta trave é suportada por um segundo cabo, com tensão T_2 , fixo ao suporte vertical.

- Quais são as três forças que actuam na trave.
- Mostre que a componente vertical de T_2 tem de valer 80 N.
- Qual é o valor da força exercida pelo suporte vertical sobre a trave.



Resolução

- As forças estão representadas a azul na figura. São a tensão $\vec{T}_1$, a tensão $\vec{T}_2$ e a força de reacção $\vec{R}$ exercida pelo suporte vertical, com um ângulo que à partida desconhecemos. O peso da trave é desprezável.
- O bloco suspenso está em equilíbrio pelo que a resultante das forças nele aplicadas (o seu peso e a tensão do fio) tem de ser igual a zero. Note-se que esta tensão de valor igual a T_1 é oposta à representada na figura. Logo para o bloco podemos escrever $T_1 = P = 80$ N.

Para a trave, como só as tensões têm momento relativamente ao ponto de articulação podemos escrever para o equilíbrio de rotação (sendo ℓ o comprimento da trave) $\ell T_{2y} = \ell T_1 \Rightarrow T_{2y} = T_1 = 80$ N.

Para a translação temos duas equações de equilíbrio, uma na vertical e outra na horizontal. A equação na vertical,

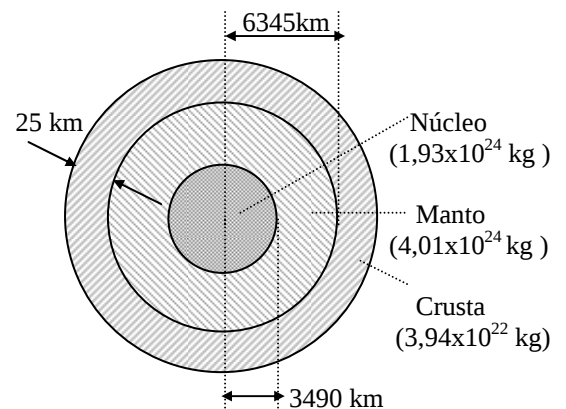
$$R_y + T_{2y} = T_1$$

atendendo à igualdade anterior vai implicar que $R_y = 0$ e que portanto $\vec{R}$ é uma força horizontal.

- Na horizontal vem: $R = T_{2x} = T_{2y} / \tan 30^\circ = 139$ N

Questão 1

A figura representa, embora não à escala, as diferentes camadas que compõem o interior da Terra, com as respectivas dimensões e massas. A Terra tem uma massa total de $5,98 \times 10^{24}$ kg e um raio de 6370 km. Ignorando a rotação da Terra e considerando-a esférica, calcule a aceleração da gravidade à profundidade de 25 km, na fronteira entre a Crusta e o Manto. Qual seria o valor obtido se considerássemos a Terra com uma densidade de massa uniforme?



[Medidas precisas da gravidade a diferentes profundidades constituem um diagnóstico da estrutura da Terra, embora os resultados possam ser afectados por variações locais.]

Resolução

Aplicando o princípio de sobreposição, a força gravitacional exercida sobre um objecto de massa m , colocado entre a crosta e o manto, será dada pela soma das forças exercidas pelo núcleo e pelo manto. A crosta de espessura d exerce uma força igual a zero, já que o objecto está no seu interior. Vem então:

$$\vec{F} = -G \left(\frac{mM_{nucl}}{(R_T - d)^2} + \frac{mM_{manto}}{(R_T - d)^2} \right) \hat{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \left(\frac{M_{nucl} + M_{manto}}{(R_T - d)^2} \right) \hat{r}$$

$$g = 6,673 \times 10^{-11} \times \left(\frac{1,93 \times 10^{24} + 4,01 \times 10^{24}}{(6345)^2 \times 10^6} \right) = 9,84 \text{ m/s}^2$$

Sendo a Terra homogénea viria:

$$\vec{F} = -G \left(\frac{mM'}{(R_T - d)^2} \right) \hat{r} = -G \left(\frac{m \frac{3M_T}{4\pi R_T^3} \times \frac{4}{3} \pi (R_T - d)^3}{(R_T - d)^2} \right) \hat{r} = -G \left(\frac{mM_T (R_T - d)}{R_T^3} \right) \hat{r}$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \left(\frac{M_T (R_T - d)}{R_T^3} \right) \hat{r}$$

$$g = 6,673 \times 10^{-11} \times \left(\frac{5,98 \times 10^{24} \times 6345 \times 10^3}{(6370)^3 \times 10^9} \right) = 9,80 \text{ m/s}^2$$

Questão 2

Mostre que a velocidade de escape de um dado objecto de um planeta está relacionada com a velocidade do mesmo objecto numa órbita circular logo acima da superfície do planeta através da seguinte expressão, em que v_e e v_c são as velocidades de escape e da órbita circular, respectivamente:

$$v_e = \sqrt{2} v_c$$

Resolução

A velocidade de escape corresponde à velocidade inicial que se tem de dar a um corpo para que ele se consiga libertar da interacção gravitacional, ou seja, consiga atingir velocidade nula a distância infinita. Na situação inicial temos o corpo com velocidade v_e , à superfície do planeta de massa M e raio R . Na situação final, a energia cinética é nula e a potencial também. Temos então

$$\text{Situação inicial} - E_i = \frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{GmM}{R}$$

$$\text{Situação final} - E_f = 0$$

Da conservação da energia mecânica resulta

$$\frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{GmM}{R} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_e^2 = \frac{GmM}{R} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Numa órbita circular de raio R , o objecto tem uma velocidade, v , tal que a sua aceleração centrípeta multiplicada pela sua massa seja igual à força gravitacional. Temos

$$m \frac{v^2}{R} = G \frac{mM}{R^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \Rightarrow$$

$$v_e = \sqrt{2} v$$